

# UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL AFÍN CON EL USO DE LA CALCULADORA CLASSWIZ

## A DIDACTIC PROPOSAL FOR THE TEACHING AND LEARNING OF THE AFFINE LINEAR FUNCTION WITH THE USE OF THE CLASSWIZ CALCULATOR

**Daysi Julissa García-Cuéllar, Mónica Marcela Parra-Zapata, Mihály Martínez-Miraval Horacio Saúl Sostenes González**

Pontificia Universidad Católica de São Paulo (Brasil). Universidad de Antioquia (Colombia).

Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Cinvestav (México)

[ra00193072@puesp.edu.br](mailto:ra00193072@puesp.edu.br), [monica.parra@udea.edu.co](mailto:monica.parra@udea.edu.co), [martinez.ma@pucp.edu.pe](mailto:martinez.ma@pucp.edu.pe),

[hssg\\_33@hotmail.com](mailto:hssg_33@hotmail.com)

### Resumen

La idea de la calculadora como instrumento que puede ocupar el lugar del cálculo escrito o mental parece superponerse a la idea de la calculadora como herramienta facilitadora de exploraciones numéricas e indagaciones matemáticas, tan importantes en el contexto de resolución de problemas. El presente escrito muestra una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora *ClassWiz* en la enseñanza secundaria. Se utiliza el código QR que es transferido a una aplicación de Smartphone (Casio-EDU+) para que la representación de la función pueda ser analizada tanto numérica como gráficamente. Consideramos que esta propuesta pueda ser utilizada por maestros de Educación Secundaria para introducir esta noción en sus clases.

**Palabras clave:** calculadora, función lineal, propuesta didáctica

### Abstract

The idea of the calculator as a tool that replace written or mental calculation seems to overlap the idea of the calculator as an enabler tool of numerical explorations and mathematical enquiries, which are very important in the context of problem solving. This paper shows a didactic proposal for the teaching and learning of the affine linear function with the use of the CLASSWIZ calculator in secondary education. The QR code that is transferred to a Smartphone application (Casio-EDU+) is used, so that the representation of the function can be analyzed both numerically and graphically. We considered that secondary school teachers can use this proposal to introduce the concept in their classes.

**Key words:** calculator, linear function, didactic proposal

## ■ Introducción

Diversos autores sostienen la idea de que la integración de la calculadora en la clase de Matemáticas puede ser altamente ventajosa, incluso al inicio de la Enseñanza Básica. Según Campbell y Stewart (1993), la resolución de problemas con el uso de la calculadora puede alentar al alumno a entender y representar el problema, e indagar por el comportamiento de las funciones.

El uso de la calculadora facilita la focalización de la atención en el proceso de resolución del problema, lo que no siempre sucede cuando se hacen algoritmos por rutinas (Campbell y Stewart, 1993; Duea, Immerzeel, Ockenga y Tarr, 1980; Albergaria y Ponte, 2008). Lo anterior no dispensa una buena comprensión de los conceptos ni permite desarrollar la capacidad aritmética mental. Como indican Cockcroft (1985) y Abelló (1997), la disponibilidad de la calculadora no reduce de alguna manera la necesidad de su usuario de comprender Matemáticas.

La calculadora Casio-*ClassWiz* tiene 270 funciones, entre ellas: crear lista de variables, factorización prima, enteros aleatorios, transformación de coordenadas, cálculo de potencia y fraccionarios, trigonometría, combinación y permutación, estadísticas, desviación estándar, análisis de regresión, función de tabla. Además, permite utilizar el código *QR* que puede ser transferido a una aplicación de Smartphone (*Casio EDU+*) para que la representación de la función pueda ser analizada numérica y gráficamente (Ver figura 1).



Figura 1: Algunas funciones de la calculadora Casio - *ClassWiz*

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, muestran la necesidad de realizar estudios con relación a las funciones, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Trujillo, Guerrero y Castro, 2007; Tabach y Nachielli, 2015; García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018), como por ejemplo, dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función, dificultades en la conversión de la representación en registro gráfico al algebraico y viceversa. Por lo que es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

Por lo anterior, nuestro objetivo es presentar una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Casio-*ClassWiz* en la enseñanza secundaria.

## ■ Fundamento teórico

El marco teórico en que se fundamenta nuestra propuesta didáctica es la Teoría de Registros de Representación Semiótica (*TRRS*) de Duval (1995).

Duval (1995), afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las Matemáticas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas, requieren del uso de sistemas de expresión y representación. Duval aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente, sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: Lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (Duval, 1995, p.14).

Para Duval (1995), las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la Semiosis (actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas) son la *formación*, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; *el tratamiento*, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro, y *la conversión*, que es una transformación que produce una representación en un registro distinto al inicial. De acuerdo con el autor, para que se logre el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes. Es en esta transformación donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro.

Duval (2012) cuatro tipos de aprehensiones en el registro figural. La *perceptiva*, que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio; *secuencial*, que concierne al orden de construcción de una figura, este orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas a utilizar; *operatoria*, que son las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras; y *discursiva*, que corresponde a una explicación desde otras propiedades matemáticas. En nuestra propuesta didáctica, por tratarse del objeto matemático, función lineal afín y trabajar dentro del registro gráfico, prestaremos mayor atención en las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas.

Adaptamos estos registros a nuestro objeto matemático función lineal afín con la mediación de la calculadora Casio-*ClassWizz* como se muestra en la figura 2.

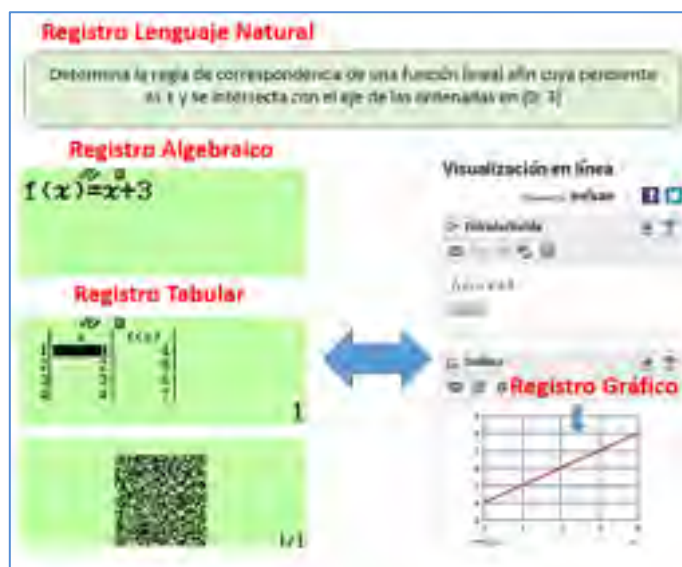


Figura 2: Algunos registros de representación mediados por Casio - *ClassWizz*

## ■ Metodología

Nuestra propuesta didáctica está basada en el enfoque metodológico *Investigación basada en el diseño* o también llamada *Investigación de diseño* (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Dicho enfoque se caracteriza por ser primordialmente cualitativo.

Molina, Castro, Molina y Castro (2011), sostienen que este enfoque metodológico tiene la finalidad de establecer un modelo del aprendizaje de los estudiantes con relación a un contenido matemático específico, como resultado de las situaciones e interacciones planificadas por el equipo de la investigación.

Las investigaciones basadas en el diseño se enmarcan en los *experimentos de enseñanza*, en los cuales se diseñan secuencias instruccionales de enseñanza donde participan un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

En el desarrollo de los *experimentos de enseñanza* se distinguen las tres fases siguientes (Cobb y Gravemeijer, 2008, en Díaz, Gutierrez y Luque, 2017):

*Fase 1. Preparación del experimento:* en esta fase se definen los propósitos del experimento y los contenidos a ser abordados, las actividades y tareas a ser resueltas y una “trayectoria hipotética de aprendizaje” por la cual puede producirse el aprendizaje tras resolver las actividades.

*Fase 2. Experimentación para promover el aprendizaje:* en esta fase se llevan a cabo las interacciones entre los participantes del experimento con los contenidos, las actividades, las herramientas y el formador.

*Fase 3. Análisis retrospectivo de los datos:* en este caso se analizan los datos recopilados de la fase 2 del experimento. En muchas ocasiones, este análisis conduce a realizar cambios en las actividades planteadas y en la trayectoria hipotética de aprendizaje.

La tabla 1 muestra las fases y las acciones a realizar en cada una de ellas:

**Tabla 1.** Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza

Fases	Acciones
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO	<p><i>Definir el problema y los objetivos de investigación.</i></p> <p><i>Identificar los objetivos instruccionales.</i></p> <p><i>Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos.</i></p> <p>Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos.</p> <p>Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización.</p> <p>Diseñar la recogida de datos.</p> <p><i>Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.</i></p> <p>Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.</p>
EXPERIMENTACIÓN	

Antes de cada intervención	<p>Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos.</p> <p>Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</p> <p>Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.</p> <p>Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.</p> <p>Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos.</p> <p>Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.</p>
En cada intervención	<p>Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención.</p> <p>Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</p>
Después de cada intervención	<p>Analizar los datos recogidos en la intervención.</p> <p>Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/ conjeturas de investigación.</p>
ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE LOS DATOS	<p>Recopilar y organizar toda la información recogida.</p> <p>Analizar el conjunto de los datos, lo que implica:</p> <p>a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.</p> <p>b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador -docente que contribuyeron a dichos cambios.</p>

*Fuente:* Molina, Castro, Molina y Castro (2011, p.80)

## ■ Experimento de enseñanza

Como nuestro trabajo es una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Casio-*ClassWiz*, nos centramos en la primera fase del experimento de enseñanza (preparación del experimento – Tabla1) del enfoque metodológico Investigación basada en el diseño.

*Objetivos instruccionales:*

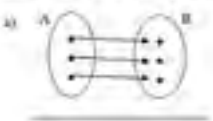
Al desarrollar la propuesta didáctica (Experimento de enseñanza) se busca que los estudiantes aprendan las características, propiedades y representaciones de la función lineal afín al desarrollar actividades que permitan las conversiones de registros de representación de dicho objeto matemático y sus aprehensiones, utilizando la calculadora Casio-*ClassWiz*.

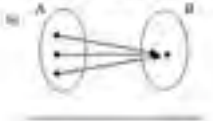
Los contenidos seleccionados para el experimento están relacionados con la definición de la función lineal afín, sus distintas representaciones, propiedades y características principales.

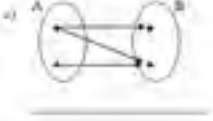
*Identificación del conocimiento inicial:*

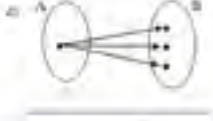
Para poder identificar los saberes previos de los estudiantes con relación a la función lineal afín, propusimos algunas actividades referidas a aspectos generales de las funciones reales (ver figura 3), para identificar el nivel en que se encuentran en relación con este objeto matemático.

1. Indicar en cada caso, si el diagrama corresponde a una función o no:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Considere una función  $f$ , cuya gráfica se muestra en la figura:

a) Determine el dominio de la función  $f$ .

b) Calcule los valores de  $x$ , tal que  $f(x) = -2$ .

3. La gráfica de la función  $f(x) = \frac{x}{2} - 1$  es:

4. Determina el valor de la función para el punto señalado:

Función	$f(-5)$	$f\left(-\frac{1}{4}\right)$	$f(0)$	$f(\pi)$
$f(x) = -2x + 1$				
$f(u) = u^3$				

Figura 3: Algunas preguntas para identificar saberes previos sobre funciones

### La trayectoria hipotética de aprendizaje:

Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje consiste en describir el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.

Nuestra propuesta didáctica (Experimento de enseñanza) de la función lineal afín, busca evidenciar que los estudiantes aprendan a:

Utilizar la calculadora Casio-ClassWiz como medio para analizar el comportamiento de la función lineal afín al momento de graficar ésta en lápiz y papel.

Utilizar la calculadora Casio-ClassWiz como medio para analizar el comportamiento de la función lineal afín al momento de representarla en el registro gráfico mediante un aplicativo con códigos QR.

Expresar y justificar sus resultados al resolver actividades que permitan conversiones de las representaciones de la función lineal afín en los registros de lenguaje natural, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico.

Movilizar las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas en el registro gráfico de la función lineal afín al resolver las actividades propuestas.



*Secuencia instruccional:*

Nuestra propuesta didáctica tiene dos momentos:

En el primero, las actividades se centran en la caracterización de la función lineal afín. Así como en el cálculo del valor numérico con uso de la calculadora Casio-*ClassWiz* para representar, a lápiz y papel, la función lineal afín.

En el segundo, las actividades se centran en la conversión de registros de la función lineal afín con el uso del código *QR* de la calculadora Casio-*ClassWiz*.

A continuación, presentamos cuatro actividades de nuestra propuesta didáctica, las dos primeras correspondientes al primer momento y las dos últimas, al segundo momento de la propuesta.

*Momento I: Caracterizar y representar la función lineal afín*

Actividad 1:

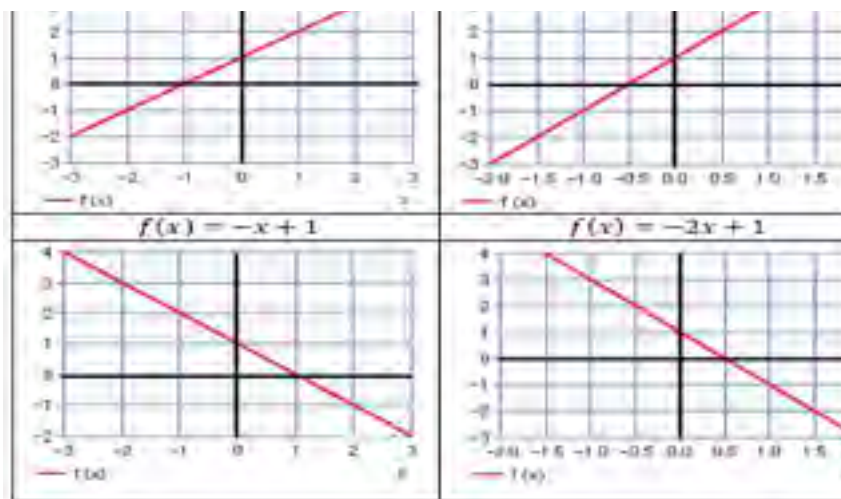
Caracterizando  $f(x) = mx + b$

a) Reconociendo  $f(x) = mx + b$ , cuando  $b = 1$

Observa las representaciones gráficas de las funciones y responde:

¿Cómo es la función cuando los valores de  $m$  son negativos?

¿Cómo es la función cuando los valores de  $m$  son positivos?



**Figura 4:** Gráficas de las funciones lineales afín realizadas con la calculadora Casio-*ClassWiz*.

b) Reconociendo  $f(x) = mx + b$ , cuando  $m = 1$

Observa las representaciones gráficas de las funciones y responde:

¿Qué ocurre con las gráficas de las funciones cuando  $b$  toma los valores de 1; 2 y 3?

¿Qué ocurre con las gráficas de las funciones cuando  $b$  toma los valores de -1; -2 y -3?

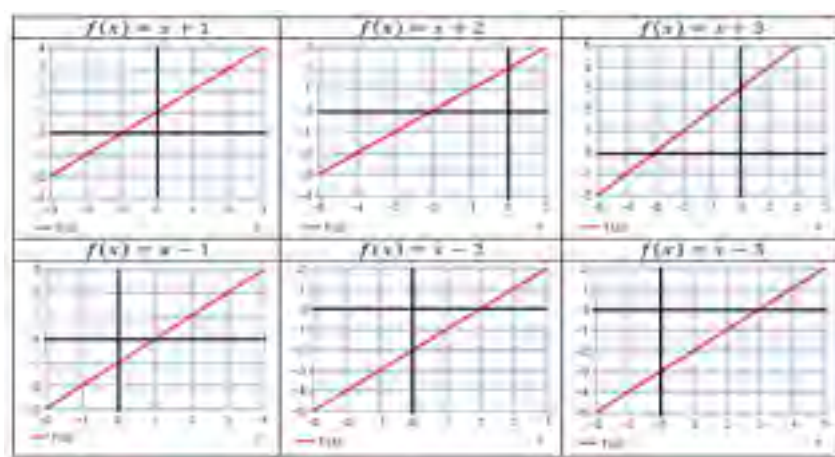


Figura 5: Gráficas de las funciones lineales afín realizadas con la calculadora Casio-ClassWiz.

Esta actividad busca caracterizar a la función lineal afín, a través de sus parámetros  $m$  (pendiente) y  $b$  (intersección en la ordenada) en el registro gráfico, por lo cual, al dar respuesta a éstas, los estudiantes movilizarán las aprehensiones perceptivas y discursivas.

Actividad 2:

Dada la función  $f(x) = 2x + 4$ , realiza la gráfica; indica el dominio y el rango; halla los interceptos con los ejes “ $x$ ” e “ $y$ ”; e indica si la función es creciente o decreciente.

En esta actividad, los estudiantes deberán tabular los valores de  $x$  en  $f$  con ayuda de la calculadora Casio-ClassWiz como muestra la figura 6 y luego, representar la gráfica de  $f$  a lápiz y papel. Por ello, los estudiantes realizarán la conversión del registro algebraico a los registros tabular y gráfico. Luego, por la aprehensión perceptual reconocerán el dominio, rango, los interceptos y si la función es creciente o decreciente.

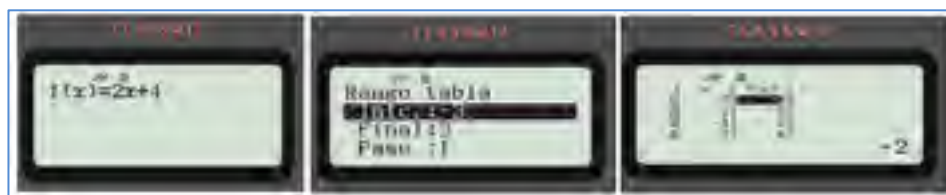


Figura 6: Tabulando con el uso de la calculadora Casio-ClassWiz

*Momento II: Resolver actividades de contexto realizando conversiones de la representación de la función lineal afín en diferentes registros.*

Actividad 3:

Un hotel alquila una habitación a una persona a una tarifa de 25 soles la primera noche y 20 soles por cada noche siguiente. Determine una función que exprese el costo en soles del alquiler de la habitación por  $x$  noches y representela gráficamente.



En esta actividad, los estudiantes deben de reconocer la regla de correspondencia, es decir, harán una conversión de representaciones del registro lenguaje natural al registro algebraico, para luego, usar la Casio-ClassWiz en el registro tabular (ver figura 7), y finalmente, representarla gráficamente a lápiz y papel. También podrán comparar su resultado usando el código QR.



Figura 7: Tabulando con el uso de la calculadora Casio-ClassWiz

#### Actividad 4:

Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se va vaciando, B se va llenando. El depósito A está lleno y tiene una capacidad de 15 litros y se vacía a razón de 2 litros por minuto. El depósito B, que está vacío, se llena con una velocidad de un litro por minuto. Representa las reglas de correspondencia de las dos funciones que relacionan la capacidad (y) de los depósitos en función del tiempo (x) transcurrido. Determina en qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua.

Para dar solución a la actividad 4, los estudiantes deben representar las reglas de correspondencias de las dos funciones que se proponen en la tarea dada, y luego deben utilizar la calculadora Casio-ClassWiz para identificar los posibles valores comunes en que los depósitos tienen igual cantidad de agua. Finalmente, deben representar gráficamente ambas funciones haciendo uso del código QR que por medio de un aplicativo Smartphone Casio-EDU+ permitirá observar la gráfica y verificar que a los 5 minutos ambos depósitos tendrán la misma cantidad de agua. La figura 8 presenta el proceso anterior.



Figura 8. Solución de la tarea con el uso de ClassWiz

#### ■ Conclusiones

A manera de conclusiones, podemos afirmar que la propuesta didáctica está enfocada a presentar actividades donde el uso de la calculadora facilita a que los estudiantes centren su atención en el proceso de resolución del problema, lo que no siempre sucede cuando se hacen algoritmos por rutinas.

El diseño de la secuencia instruccional (propuesta didáctica) de la función lineal afín utilizando la calculadora Casio-ClassWiz, se basó en el enfoque metodológico *Investigación basada en el diseño* que abarca los experimentos de enseñanza, del cual solo hemos abarcado la primera fase denominada *preparación del experimento* en la cual se han definido los objetivos instruccionales, los contenidos a trabajar, las actividades para reconocer saberes previos, las actividades a resolver y la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Los dos momentos de nuestra propuesta didáctica se han diseñado para que los estudiantes comprendan el concepto de la función lineal afín y sus características algebraica, geométrica y variacional, a partir de los tratamientos y conversiones de sus representaciones en los registros de lenguaje natural, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico, analizados bajo la teoría de Registros de Representación Semiótica. Del mismo modo, estudiar las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas que se evidencian al resolver las tareas propuestas de la secuencia de actividades planteada.

### ■ Referencias bibliográficas

- Abelló, F. U. (1997). *Aritmética y calculadoras*. Madrid: Síntesis.
- Albergaria, I. S. y Ponte, J. P. (2008). *Cálculo mental e calculadora*. In A. P. Canavarró, D. Moreira y M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.
- Campbell, P. y Stewart, E. (1993). *Calculators and computers*. In R. J. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). New York, NY: Macmillan.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (traducción en español de la versión publicada en inglés en 1982). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Díaz, S., Gutiérrez, R. y Luque, R. (2017). Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica  $f(x) = \tan x$  con el software GeoGebra. *Revista Números* (97), p. 83-91.
- Düea, J., Immerzeel, G., Ockenga, E. y Tarr, J. (1980). *Problem posing using calculator*. In S. Krulik & R. Reys (Orgs.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 177-126). País: editorial
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis: Brasil.
- García-Cuellar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis *Instrumental* del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/324515608\\_ESTUDIO\\_DEL\\_PROCESO\\_DE\\_GENESIS\\_INSTRUMENTAL\\_DEL\\_ARTEFACTO\\_SIMBOLICO\\_FUNCION\\_EXPONENCIAL/citations](https://www.researchgate.net/publication/324515608_ESTUDIO_DEL_PROCESO_DE_GENESIS_INSTRUMENTAL_DEL_ARTEFACTO_SIMBOLICO_FUNCION_EXPONENCIAL/citations)
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75–88.
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. Mahwah: NJ: LAE.
- Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0>
- Trujillo, M.; Guerrero, J. y Castro, M. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de investigación*, 7 (2), 223 – 233.